E.N.S. SAINT-CLOUD FONTENAY

OPTION SCIENCES NATURELLES

DURÉE : 3 heures

Les deux parties sont indépendantes et seront traitées sur des feuilles séparées.

I

Dans tout le problème, n est un entier positif ou nul.

1° On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt.$$

a. Montrer que la suite de terme général I_n est convergente et déterminer sa limite.

b. Calculer I_0 et I_1.

c. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n. En déduire I_2 et I_3. Plus généralement, donner l'expression de I_{4p}, I_{4p+1}, I_{4p+2}, I_{4p+3}, pour $p \in \mathbb{N}$.

d. Déduire de ce qui précède la convergence et la somme des séries de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

2° On considère la série entière de terme général $\dfrac{x^n}{n+1}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer son domaine de convergence.

b. Calculer, lorsqu'elle existe, la somme de cette série.

3° On considère la série entière de terme général $\dfrac{x^n}{2n+1}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer son domaine de convergence.

b. Calculer, lorsqu'elle existe, la somme de cette série (pour ce calcul, on posera $y = \sqrt{x}$, pour $x > 0$ et $y = -\sqrt{-x}$, pour $x < 0$).

II

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Soit u un endomorphisme de E; a et b étant deux nombres réels distincts, on note :

i l'application identique de E $\quad$ v l'endomorphisme $u - a\,i$

w l'endomorphisme $u - b\,i$ $\quad$ M_1 le noyau de v $\quad$ M_2 le noyau de $v \circ v$

N_1 le noyau de w.

1° On suppose que $v \circ v \circ w$ est l'application nulle de E, que $v \circ w$ n'est pas l'application nulle de E et que a et b sont valeurs propres de u.

a. Démontrer que les seules valeurs propres possibles de u sont a et b.

b. Démontrer les relations : $M_1 \subset M_2$ et $M_1 \neq M_2$.

c. Montrer que M_2 et N_1 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et préciser les dimensions de M_1, M_2 et N_1.

d. Soit $\hat{v}$ la restriction de v à M_2. Que dire de $\hat{v} \circ \hat{v}$? Déterminer le noyau et l'image de $\hat{v}$.

e. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

2° On suppose maintenant que, relativement à une base donnée de E, l'endomorphisme u a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer $A^2 - 6A + 8I$ et $A^3 - 10A^2 + 32A - 32I$, où I est la matrice de i.

b. En déduire qu'il existe deux nombres réels a et b $(a > b)$ pour lesquels les hypothèses de la première question sont vérifiées.

c. Déterminer une base de M_1, une base de M_2 et une base de N_1.

d. Déterminer une base de E par rapport à laquelle l'endomorphisme u a pour matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e. Calculer J^n, puis A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Page 50 1986 ENS Saint-Cloud-Fontenay (Option Sciences naturelles.Mathématiques